

Metodi quantitativi per la gestione del rischio Parte 1: Costruzione di modelli di rischio

Paolo Brandimarte

paolo.brandimarte@polito.it

<https://staff.polito.it/paolo.brandimarte>

3 maggio 2022



Il relatore

- Laureato in Ingegneria Elettronica (1987, PoliTO).
- Professore ordinario di Ricerca Operativa.
- Docente nel corso di laurea in Matematica per l'Ingegneria/Ingegneria Matematica (PoliTO):
 - *Ricerca operativa*
 - *Business analytics*
 - *Metodi quantitativi per la gestione del rischio*
- Docente nel Master in Finance, Insurance and Risk Management (MAFIRM, Collegio Carlo Alberto/UniTO):
 - *Mathematics for finance*
 - *Financial engineering*

https://didattica.polito.it/laurea_magistrale/ingegneria_matematica/it/home

<https://www.carloalberto.org/education/master-in-finance/>

Obiettivi del ciclo di presentazioni

Le tre presentazioni, di carattere informativo, hanno i seguenti obiettivi:

- sensibilizzare circa la necessità di rappresentare in modo esplicito e non ambiguo i fattori di rischio, finanziari e non, che hanno impatto su una decisione in condizioni di incertezza;
- illustrare i modi alternativi per caratterizzarne l'incertezza;
- presentare misure di rischio di uso comune in ambito finanziario, che possono essere utilizzate anche in contesti operativi;
- illustrare come modelli e misure di rischio possono essere utilizzati in ambito decisionale.

Useremo piccoli esempi numerici, estremamente semplificati, il cui scopo è unicamente rendere più concreta la presentazione.

I tre livelli di business analytics

- *Descriptive analytics*: Con cosa abbiamo a che fare?
- *Predictive analytics*: Che cosa può accadere? Qual è l'impatto di una nostra decisione? Si può distinguere la previsione pura (forecasting) dalla predizione (prediction), sulla base del tipo di incertezza, che può essere puramente esogena (il prezzo del petrolio) o almeno parzialmente endogena (la domanda per un prodotto in funzione del prezzo).
- *Prescriptive analytics*: Cosa devo fare?
Non dobbiamo basare la nostra decisione su una previsione puntuale. Problemi a molti stadi: strategie adattative.

Ingredienti per la gestione del rischio

- *Modello di rischio*: rappresentazione dei fattori di rischio, della loro incertezza e delle loro interazioni, e di come essi si mappano in un risultato economico/operativo (esempio, impatto dei tassi di interesse sui prezzi delle obbligazioni, e dei tassi di sconto sul valore attuale netto).
- *Misura di rischio*: come aggregare i diversi scenari possibili in un indicatore di rischio. Questo non si deve semplicemente limitare a caratterizzare la dispersione di un risultato (deviazione standard o varianza) e non è semplicemente una misura di sensitività (duration di una obbligazione).
- *Gestione del rischio*: scelta di una decisione/strategia. In una condizione di rischio, possiamo semplicemente scegliere di evitarlo (avoidance). In alternativa possiamo mitigarlo mediante diversificazione o trasferimento del rischio (assicurazione). La strategia può fare uso di derivati finanziari, se correlati con i fattori di rischio.

Il caso AIFS

L'esempio si basa sul business case HBS *Hedging Currency Risks at AIFS*, di M.A. Desai, A. Sjoman, V. Dessain (<https://hbsp.harvard.edu/product/205026-PDF-ENG?Ntt=aifs>).

Un'azienda americana organizza viaggi di istruzione in Europa per studenti americani. Ogni studente costa 1000€.

I fattori di rischio sono:

- Il tasso di cambio tra USD e EUR (rischio valuta). Ipotizziamo che il cambio corrente sia 1.22 (prezzo di un euro in dollari), e che gli scenari possibili siano: dollaro stabile (1.22), forte (1.01), debole (1.48).
- Il numero di studenti (rischio volume). Si prevede un volume di 25,000 studenti, ma potrebbero salire a 30,000 o scendere a 10,000 (atti di terrorismo, pandemia, etc.).

Il rischio di cambio non può essere trasferito alle famiglie: il catalogo ha un prezzo in dollari fissato.

L'azienda può fare ricorso a derivati (forward e opzioni call sull'euro) per coprire il rischio valuta.

Contratti forward (a termine)

Supponiamo di dovere acquistare un asset (azione, valuta, materia prima) in un istante di tempo futuro T . Conosciamo il prezzo spot corrente $S(t_0)$ dell'asset, mentre $S(T)$ è una variabile casuale.

Per eliminare il rischio di un incremento nel prezzo futuro, possiamo entrare in un contratto forward, che impegna due controparti ad acquistare (posizione lunga) e vendere (posizione corta) l'asset a un prezzo forward $F(t_0, T)$ fissato in t_0 .

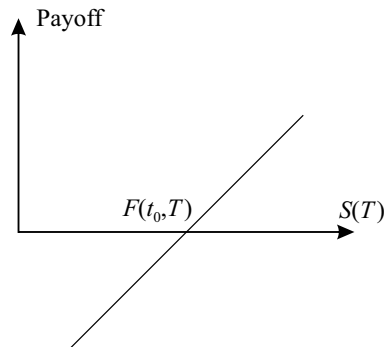
L'istante di tempo T è la maturità del contratto, e corrisponde alla data in cui deve avvenire lo scambio (in realtà il contratto potrebbe essere regolato in contanti e ci sono gradi di flessibilità nei termini di consegna).

Il payoff per la posizione lunga è $S(T) - F(t_0, T)$. Se il prezzo spot futuro è maggiore del prezzo forward, uno speculatore può acquistare il sottostante al prezzo $F(t_0, T)$ e rivenderlo immediatamente al prezzo spot $S(T)$ (in linea di principio).

Il payoff per la posizione corta (che beneficia di una riduzione nel prezzo spot) è $F(t_0, T) - S(T)$.



- Si tratta di un contratto simmetrico: le due controparti hanno obblighi simmetrici.
- Si tratta di un derivato lineare, data la forma del payoff.
- Il prezzo forward è tale che il valore del contratto è inizialmente zero. Quindi, entrare in un contratto forward non implica un costo (in linea di principio).
- I contratti futures sono una variante standardizzata dei contratti forward, il cui scopo è evitare questioni legate alla liquidità del derivato e al rischio di controparte.



Opzioni call

Un'opzione call con maturità T e prezzo strike K permette a chi la detiene (holder) di acquistare alla maturità T il sottostante al prezzo strike K , indipendentemente dal prezzo spot $S(T)$. Dal punto di vista dell'holder si tratta di un diritto, ma non di un obbligo.

Se $K = 50\text{€}$ e, alla maturità, $S(T) = 60\text{€}$, sarà conveniente esercitare l'opzione. Potremo infatti acquistare l'asset a 50€ e rivenderlo immediatamente a 60€ , con un payoff di 10€ .

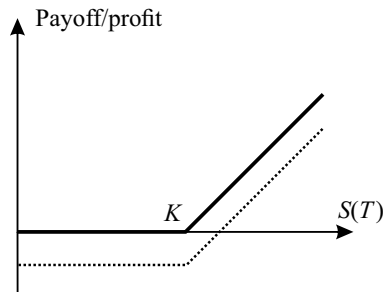
Al contrario, se $S(T) = 45\text{€}$, non ci converrà esercitare l'opzione.

Il payoff di una opzione call è quindi dato dalla formula

$$\max\{S_T - K, 0\}.$$

Una opzione put permette all'holder di vendere il sottostante. Un'opzione di stile europeo può essere esercitata solo alla maturità, mentre un'opzione di stile americano può essere esercitata in qualsiasi istante prima della maturità.

- Si tratta di un contratto non simmetrico. Le due posizioni non hanno obblighi simmetrici: l'option holder ha il diritto di esercitarla, mentre il writer ha l'obbligo di vendere il sottostante al prezzo strike in caso di esercizio dell'opzione.
- Si tratta di un derivato non lineare, data la forma del payoff.
- Dato che il payoff non può essere negativo, un'opzione ha un valore strettamente positivo alla sua creazione.
- In questo caso non possiamo identificare il payoff con il profitto, in quanto occorre tenere conto del costo iniziale dell'opzione (lato holder).
- Se l'opzione non viene esercitata, l'holder perde il capitale investito nel derivato (come se fosse il premio di un'assicurazione non sfruttata).



Caso di volume nominale (25,000 studenti)

Per semplicità, nell'esempio supponiamo che tanto il prezzo forward quanto il prezzo strike fissato per l'esercizio delle opzioni call siano pari al tasso di cambio corrente di 1.22 dollari per euro (nel gergo si dice che le opzioni sono *at-the-money*).

NB: consideriamo solo il contributo della politica di copertura del rischio. Non consideriamo il lato ricavi, quindi abbiamo extra-profitti e perdite da intendere come contributi positivi e negativi al profitto totale.

Il fabbisogno nel caso base di dollaro stabile, espresso in migliaia di dollari [k\$], è dato dal prodotto del numero di studenti per il costo in euro di ogni studente per il prezzo dell'euro in dollari:

$$25,000 \times 1000 \times 1.22\$ = 30,500k\$.$$

Se non applichiamo alcuna copertura del rischio, nel caso fortunato di dollaro forte si ha un extra-profitto

$$25,000 \times 1000 \times (1.22 - 1.01)\$ = 5250k\$.$$

Al contrario, nel caso di dollaro debole si ha una perdita

$$25,000 \times 1000 \times (1.22 - 1.48)\$ = -6500k\$.$$

Se si copre il 100% del volume nominale con un contratto forward, il risultato è sempre zero, perché comunque acquistiamo euro al prezzo di 1.22\$ per euro.

Un altro modo di vedere la cosa è che il payoff sul forward compensa sempre la perdita o l'extra-profitto rispetto alla posizione non coperta. Senza copertura, abbiamo visto che sosterremo una perdita nel caso di dollaro debole, ma questa viene compensata dal payoff positivo ricavato dalle posizioni sul forward.

Al contrario, nel caso di dollaro forte, il forward ci impegna a comprare al prezzo forward 1.22, anche se il prezzo spot è 1.01, e tale perdita annulla l'extra-profitto che si otterrebbe senza copertura.

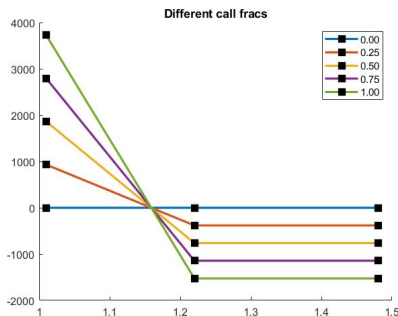
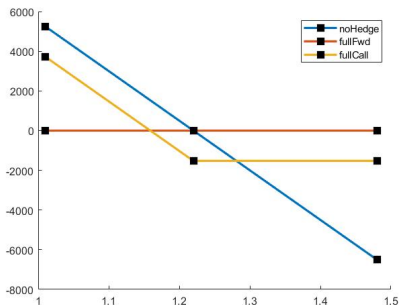
Entrare in un contratto forward non costa nulla (inizialmente). Se invece si copre il 100% del volume nominale con opzioni call, dobbiamo tenere presente il costo dell'opzione. Supponiamo che esso sia pari al 5% del valore nominale in dollari: $0.05 \times 30,500 = 1525k\$$.

Nel caso di dollaro stabile, le call non vengono esercitate, ma abbiamo una perdita pari al loro costo.

Nel caso di dollaro debole, le call vengono utilmente esercitate per comprare euro a 1.22 invece che 1.48 ma, rispetto al caso del forward, abbiamo comunque una perdita pari al loro costo.

Nel caso di dollaro forte, a differenza del forward, possiamo scegliere di non esercitare le opzioni (non ha senso comprare a 1.22 se possiamo farlo a 1.01). Tuttavia, rispetto al caso di non copertura del rischio, dobbiamo dedurre dall'extra-profitto il costo delle opzioni. Il risultato è quindi $5250 - 1525 = 3725k\$$ (sempre in migliaia di dollari).

Le figure seguenti mostrano che una copertura con forward annulla il rischio, nello scenario di volume nominale. La copertura con opzioni preserva un po' di potenziale di upside, pagato con perdite negli scenari in cui esse non vengono esercitate.



Quale politica vi sembra preferibile?

Caso di volume 30,000

I 5000 studenti extra non hanno impatto nel caso di dollaro stabile.

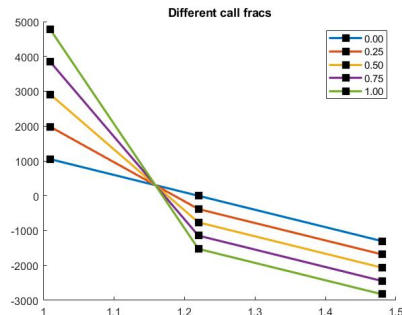
Se non si copre il rischio, la perdita nel caso di dollaro debole è

$$30,000 \times (1.22 - 1.48) = -7800k\$.$$

In questo caso la copertura è sottodimensionata.

Nel caso di dollaro forte, si ha un ulteriore extra-profitto pari a $5000 \times (1.22 - 1.01) = 1050k\$$, che non viene eroso dalla perdita sui forward. Coprendo con le opzioni, si ha un extra-profitto complessivo pari a $4775k\$$.

Nel caso di dollaro debole si ha un'ulteriore perdita pari a $5000 \times (1.22 - 1.48) = -1300k\$$, non compensata dal guadagno sui forward. Coprendo con le opzioni, si ha una perdita complessiva pari a $-2825k\$$.



Caso di volume 10,000

Senza copertura, abbiamo un extra-profitto (rispetto al caso base con questo volume) pari a

$$10,000 \times (1.22 - 1.01) = 2100k\$$$

nel caso di dollaro forte, e una perdita pari a

$$10,000 \times (1.22 - 1.48) = -2600k\$$$

nel caso di dollaro debole.

NB: ricordiamo che qui stiamo valutando solo i risultati legati alla politica di copertura, e non consideriamo il lato ricavi.

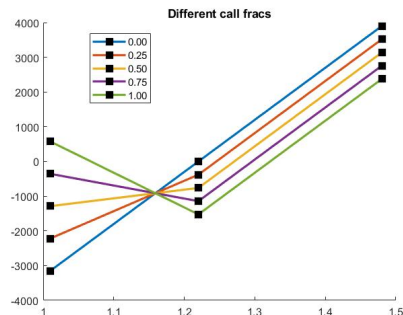
In questo scenario, la copertura è sovradimensionata. Nel caso di un contratto forward, siamo comunque obbligati ad acquistare 15 milioni di euro che non ci servono, e i risultati si invertono rispetto ai casi precedenti.

Nel caso di dollaro debole, possiamo rivendere gli euro in eccesso con un extra-profitto pari a $-15,000 \times (1.22 - 1.48) = 3900k\$$

Nel caso di dollaro forte, l'obbligo del contratto implica una perdita pari a $-15000 \times (1.22 - 1.01) = -3150k\$$ (peggiore che nel caso di dollaro debole e assenza di copertura). Tale perdita si colloca in uno scenario in cui il lato ricavi non è certo soddisfacente.

Al contrario, le opzioni possono non essere esercitate nel caso di dollaro forte. Il risultato è un extra-profitto pari a $2100 - 1525 = 575k\$$.

Nel caso di dollaro debole, esercitiamo le opzioni, e vendendo gli euro in eccesso si ha un extra-profitto pari a $3900 - 1525 = 2375k\$$.



Alcune riflessioni

- In assenza di rischio volume, la copertura con forward eliminerebbe il rischio.
- L'interazione di un fattore di rischio finanziario con uno non finanziario porta a una conclusione diversa.
- Si pone il problema di aggregare tutti i risultati in un indicatore numerico, ovvero una misura di rischio, in modo da poter scegliere in concreto una politica di copertura.
- Ha senso ragionare sul valore atteso, ovvero una media tra tutti gli scenari, pesati con le rispettive probabilità?
- Siamo sicuri di poter assegnare una probabilità a eventi estremi, ma potenzialmente fatali?
- In certi casi, potrebbe avere senso considerare il caso peggiore, non quello medio, all'interno di un insieme di scenari.
- In alternativa possiamo considerare il valore atteso, corretto in qualche modo tramite una misura di rischio (modelli decisionali mean-risk). Notiamo che una misura basata sulla dispersione penalizza simmetricamente perdite ed extra-profitti.
- Non abbiamo considerato l'aspetto dinamico del problema (e coperture naturali cambiando il modello di business).

Modelli di rischio

Esiste una varietà enorme di fattori di rischio che possono giocare un ruolo.

- Fattori finanziari come il rischio valuta e quello legato ai tassi di interesse.
- In termini di mercati azionari gioca anche un ruolo il rischio volatilità, che non è direzionale e ha un impatto sul prezzo di molti derivati.
- Il rischio controparte ed il rischio di credito (retail e non retail).
- Rischi geopolitici e legati alle normative.
- Rischio operativo (operational risk).
- Rischi legati alla supply chain.
- Incertezza sul prezzo delle materie prime, compreso il petrolio con impatto sui costi di trasporto e dell'energia.
- Rischi legati alla domanda (compreso il rischio obsolescenza) e alla capacità produttiva.
- Rischio di correlazione e rischio di modello.

La caratterizzazione dei fattori di rischio va corredata con un meccanismo che ne mappa la realizzazione in un risultato economico/operativo (ad esempio un modello di pricing per i derivati, che qui non abbiamo considerato).

Modelli di rischio

Non sempre abbiamo dati sufficienti, in termini di quantità e qualità, per caratterizzare l'incertezza sulla base di strumenti classici derivati dalla teoria delle probabilità e dalla statistica.

Nell'ottimizzazione robusta si preferisce definire un uncertainty set, a cui non si associano probabilità, e si ottimizza sulla base del caso peggiore. Il grado di conservatività della soluzione dipende dall'ampiezza dell'uncertainty set.

Va notato che l'incertezza su alcuni parametri non si lega alla realizzazione di eventi casuali. Pensiamo a come valutare il costo di giacenza in magazzino.

In altri casi ancora si devono introdurre probabilità soggettive. Questo va fatto in modo disciplinato (esistono strumenti come le reti Bayesiane) e va comunque effettuata un'analisi di sensitività dei risultati.



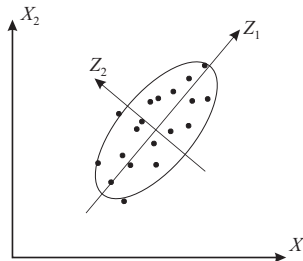
Il ruolo dei metodi di apprendimento statistico (machine learning)

La disponibilità di ambienti software open source come R (<https://www.r-project.org/>, <https://www.rstudio.com/>) permette l'applicazione di approcci quantitativi sofisticati da parte di utenti senza un background quantitativo forte.

A volte il numero dei fattori di rischio risulta difficile da trattare (esempio, i tassi di interesse in una struttura per scadenza).

Si possono utilizzare metodi di data reduction (analisi delle componenti principali) per ridurre la dimensionalità del problema.

I metodi di data reduction sono esempi di metodi di apprendimento non supervisionato.



Metodi di apprendimento supervisionato (classificatori basati su regressione logistica, support vector machine, etc.) sono di uso comune come modelli predittivi per il rischio, in situazioni come il rischio di credito retail.