DISMA Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange

ECCELLENZA 2018 · 2022

Metodi quantitativi per la gestione del rischio
Parte 3: Gestione del rischio e decisioni in condizioni di incertezza

Paolo Brandimarte

paolo.brandimarte@polito.it

https://staff.polito.it/paolo.brandimarte

01 giugno 2022

Ordine dei Dottori Commercialisti e degli Esperti Contabili di Torino

Fondazione Piero Piccatti e Aldo Milanese

ORDINE DOTTORI COMMERCIALISTI ED ESPERTI CONTABILI TORINO

Decisioni in condizioni di incertezza

Questioni:

- Cosa è una previsione?
- Nel prendere decisioni, possiamo ignorare l'incertezza nei fattori di rischio?
- È vero che all'aumentare dell'incertezza dovremmo essere più conservativi?
- Come interagiscono i fattori economici (margini di profitto etc.) con l'incertezza?
- Possiamo prendere decisioni in ambito multistadio (NB: da non confondere con multiperiodale) usando il VAN?
- Come possiamo integrare le misure di rischio in un modello di decisione?

Decisioni in condizioni di incertezza: il problema del newsvendor

Il problema dello strillone (newsvendor) è una versione semplificata di decisione di condizioni di incertezza quando si ha rischio di obsolescenza o deperibilità:

- Occorre decidere la quantità q prodotta (o acquistata) di un bene, prima di osservare la domanda D.
- Ipotizziamo una domanda uniformemente distribuita tra 5 e 15 (ogni valore ha probabilità pari a $1/11$).
- Ogni pezzo ha un costo unitario c (supponiamo 20).
- Nella finestra di vendita si applica un prezzo s (supponiamo 25).
- Successivamente, i pezzi invenduti vengono liquidati (stagione dei saldi) sotto costo a un prezzo $s_u < c$ (supponiamo $s_u = 0$).

Osserviamo che il valore atteso della domanda è $\mathbb{E}[D] = 10$. Ha senso porre $q = 10$, sulla base di una previsione puntuale?

Il profitto è:

$$\pi(q, D) = \begin{cases} (s-c)q & \text{se } q \leq D, \\ sD - cq & \text{se } q > D. \end{cases}$$

Non consideriamo misure di rischio, e formalizziamo il problema di decisione come la massimizzazione del profitto atteso:

$$\max_{q \geq 0} \mathbb{E}_D[\pi(q, D)].$$

Per risolvere il problema, analizziamo i casi possibili (ovviamente, non ha senso porre $q < 5$ o $q > 15$):

- Se $q = 5$, scelta molto conservativa, il profitto sarà $5 \times 5 = 25$ in ogni scenario.
- Se $q = 6$, avremo un profitto pari a 5 nel caso $D = 5$, e pari a 30 in tutti gli altri scenari. Quindi
$$\mathbb{E}_D[\pi(6, D)] = \frac{5 + 10 \times 30}{11} \approx 27.73$$

Se ignoriamo il rischio, $q = 6$ è una decisione migliore di $q = 5$.

Procedendo in modo analogo ricaviamo:

q	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{E}_D[\pi(q, D)]$	25.00	27.73	28.18	26.36	22.27	15.91
q	11	12	13	14	15	—
$\mathbb{E}_D[\pi(q, D)]$	7.27	-3.64	-16.82	-32.27	-50.00	—

Osserviamo che la soluzione ottimale non è $q = 10$, ma $q = 7$. Se confrontiamo il margine di profitto ($m = s - c = 5$, costo opportunità se andiamo corti) con il costo dell'invenduto ($c_u = c - s_u = 20$, costo contabilizzato se andiamo lunghi), il risultato non ci stupisce.

Probabilmente, se i margini fossero più ampi o se fosse possibile ricavare un valore maggiore dagli invenduti, la soluzione sarebbe diversa. Comunque sia, in generale, anche se non consideriamo misure di rischio, *non* dobbiamo basare le nostre decisioni su una previsione puntuale (valore singolo) dei fattori di rischio.

Possiamo ricavare la soluzione ottima in modo più elegante e sistematico?

Curiosamente, la soluzione sfrutta gli stessi concetti (quantili e livelli di servizio), che abbiamo introdotto nella parte 2. È facile dimostrare che la soluzione ottima risolve l'equazione seguente:

$$F_D(q^*) = \mathbb{P}\{D \leq q^*\} = \frac{m}{m + c_u}. \tag{1}$$

Il senso concreto è il seguente:

1. Il rapporto $m/(m + c_u)$ ha il significato di un livello di servizio (in-stock rate), la probabilità di soddisfare tutta la domanda.
2. La quantità q^* è il quantile della distribuzione di domanda, dettato dai fattori economici.

La quantità ordinata è grande quando lo è il margine di profitto, rispetto al costo dell'invenduto.
Nel nostro esempio numerico, il livello di servizio è molto basso

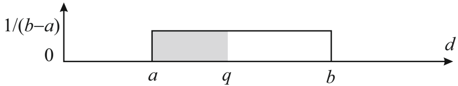
$$\frac{5}{5 + 20} = 0.2,$$

e in effetti, per una distribuzione uniforme nel continuo, tra 5 e 15 si vede chiaramente che il quantile al 20% è proprio $q^* = 7$.

Per comprenderlo basta interpretare il quantile come un valore che lascia a sinistra, sotto la curva di densità, un'area pari al livello di probabilità desiderato.

Nel caso uniforme, si ragiona su rettangoli:

$$\frac{q^* - 5}{15 - 5} = 0.2 \rightarrow q^* = 5 + 0.2 \times 10 = 7$$



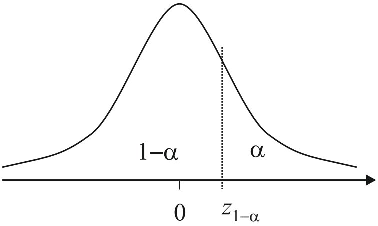
Il caso di una distribuzione normale di domanda non è così agevole, ma si risolve trovando il quantile per una normale standard (valore atteso $\mu = 0$ e $\sigma = 1$).

Nella figura, α corrisponde alla probabilità di stockout, legata ai fattori economici.

La quantità ottimale risulta pari a

$$q^* = \mu_D + z_{1-\alpha}\sigma_D,$$

dove μ_D e σ_D sono rispettivamente il valore atteso e la deviazione standard (dispersione) della domanda.



Possiamo osservare che $q^* = \mu_D$ se $m = c_u$, e che $q^* > \mu_D$ se $m > c_u$. Nell'ultimo caso, maggiore è l'incertezza misurata da σ_D, maggiore sarà q^*.

Il problema del newsvendor: considerazioni pratiche

Chiaramente, il problema del newsvendor che abbiamo considerato è solo una stilizzazione di un problema reale, in cui potrebbero giocare un ruolo:

1. l'impatto del prezzo di vendita sulla domanda;
2. la difficoltà di liquidare giacenze significative;
3. l'impatto degli stockout sulla domanda futura;
4. il rischio di perdite rilevanti, se la decisione non è ripetuta (rispetto al tempo o rispetto ai prodotti);
5. la possibilità di ordinare ulteriori quantitativi;
6. i vincoli di capacità produttiva.

Tuttavia, si tratta di un esempio istruttivo (con applicazioni variegate e sorprendenti), che dimostra come non si possano basare le decisioni su una previsione singola, anche se non si considerano misure di rischio. Formalmente:

$$\mathbb{E}_D[\pi(q, D)] \neq \pi(q, \mathbb{E}[D]).$$

Problemi multistadio: il valore del tempo e dell'informazione

Una compagnia di produzioni cinematografiche ha firmato un contratto con un regista. Il contratto prevede la possibilità di produrre un film all'anno per i prossimi due anni.
Si tratta ora di decidere se produrre 0, 1, o 2 film (NB: zero è una possibilità; evitare la sindrome del costo affondato!). Inoltre, occorre selezionare una strategia di marketing.

1. La strategia A costa 2500. Se il film è un successo, il profitto alla fine del primo anno sarà 4400; in caso contrario esso sarà 0.
2. La strategia B è più aggressiva, costa 4000, ma aumenta il profitto del 50% (per semplicità nei calcoli, supponiamo che la probabilità di successo non cambi).

Supponiamo che la probabilià di successo sia pari al 50%, e che i flussi di cassa siano scontati al 10% per tenere conto del rischio dell'investimento.

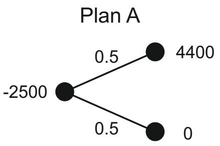
Possiamo calcolare il VAN dell'investimento, sulla base dei flussi di cassa attesi. Se ipotizziamo di produrre un solo film, seguendo la strategia A:

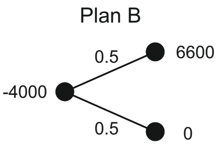
$$-2500 + \frac{0.5 \times 4400 + 0.5 \times 0}{1.10} = -2500 + \frac{2200}{1.10} = -2500 + 2000 = -500 \qquad (2)$$

Il piano A non sembra promettente.

Per il piano B si ottiene un risultato peggiore:

$$-4000 + \frac{0.5 \times 6600 + 0.5 \times 0}{1.10} = -1000$$

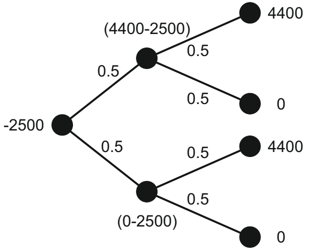




E se invece di un solo film, decidessimo di produrne due in due anni consecutivi, ripetendo il piano A?

Possiamo dire che giocare due volte una lotteria in cui ci aspettiamo di perdere migliora le nostre possibilità di successo?

Se lanciamo una monetina due volte di seguito, cosa possiamo dire del secondo lancio? La monetina ha memoria?



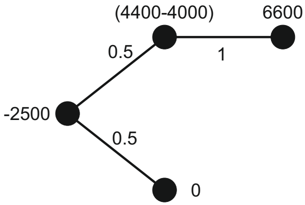
In realtà, assumere che il pubblico cinematografico non ha memoria, assimilandolo a una monetina, non pare sensato.

Nel caso della monetina, $\mathbb{P}\{\text{OK1}\} = 0.5$ e $\mathbb{P}\{\text{OK2} \mid \text{OK1}\} = 0.5$, dove la seconda probabilità è condizionata al risultato del primo lancio. Data l'assenza di memoria, l'esito del primo lancio non ci fornisce alcuna informazione sul secondo. Quindi, la probabilità condizionata è identica a quella a priori: $\mathbb{P}\{\text{OK2} \mid \text{OK1}\} = \mathbb{P}\{\text{OK2}\} = 0.5$.

Nel caso di un film, possiamo assumere $\mathbb{P}\{\text{OK2} \mid \text{OK1}\} > 0.5$ e $\mathbb{P}\{\text{OK2} \mid \text{NotOK1}\} < 0.5$.

Analizziamo un caso estremo, in cui il risultato del secondo tentativo è identico al primo.

Una possibile strategia è seguire la strategia A per il primo film, abbandonare il secondo in caso di fallimento, e seguire la strategia B in caso di successo, come indicato in figura.



In questo caso il risultato è positivo:

$$-2500 + \frac{0.5 \times (4400 - 4000) + 0.5 \times 0}{1.10} + \frac{0.5 \times 1 \times 6600}{(1.10)^2} = 409.09$$

Opzioni reali

L'esempio, pur nella sua semplicità, illustra la differenza tra:

- un problema **multiperiodale**, in cui le decisioni vengono applicate nel tempo, ma sono tutte prese al tempo $t = 0$ (tipico del VAN standard);
- un problema **multistadio**, in cui le decisioni vengono *adattate* nel tempo, in funzione dei risultati ottenuti, della realizzazione dei fattori di rischio e dell'informazione raccolta.

Esistono modi diversi, ma collegati tra di loro, per affrontare un problema multistadio, che richiede di definire una *strategia* e non una sequenza di decisioni: alberi di decisione, opzioni reali, reinforcement learning.

L'esempio è un caso didattico di *growth option*, tipica di ambiti in cui la ricerca e sviluppo giocano un ruolo fondamentale (es., il caso farmaceutico).

Uno strumento comune per valutare un'opzione reale è la simulazione Monte Carlo.

Integrazione con misure di rischio

Nei problemi precedenti non abbiamo considerato esplicitamente alcuna misura di rischio.

Indichiamo con x le nostre decisioni, vincolate ad appartenere a un insieme S, e con Y i fattori di rischio. Ne consegue un risultato economico oppure operativo (es., profitto) $\pi(x, Y)$. Data una misura di rischio $\xi[\pi(x, Y)]$, possiamo formulare diversi modelli di decisione in media–rischio.

1. Se fissiamo un coefficiente λ legato all'avversione al rischio:
$$\max_{x \in S} \Big\{ \mathbb{E}[\pi(x, Y)] - \lambda \xi[\pi(x, Y)] \Big\}.$$
2. Se fissiamo un target minimo $\widehat{\pi}$ per il risultato economico atteso:
$$\min_{x \in S} \xi[\pi(x, Y)] \qquad \text{sotto il vincolo} \quad \mathbb{E}[\pi(x, Y)] \geq \widehat{\pi}.$$
3. Se fissiamo un budget di rischio $\widehat{\beta}$:
$$\max_{x \in S} \mathbb{E}[\pi(x, Y)] \qquad \text{sotto il vincolo} \quad \xi[\pi(x, Y)] \leq \widehat{\beta}.$$

La natura esatta del problema e la difficoltà della sua soluzione dipendono dal tipo di decisione (numero finito o infinito di possibilità) e dal carattere statico (stadio singolo) o multistadio.

Riferimenti

- P. Brandimarte. *Quantitative Methods: An Introduction for Business Management*. Wiley, 2011.
- P. Brandimarte. *Handbook in Monte Carlo Simulation: Applications in Financial Engineering, Risk Management, and Economics*. Wiley, 2014.
- P. Brandimarte. *Ottimizzazione per la Ricerca Operativa*. CLUT, 2022.
- P. Brandimarte, G. Zotteri. *Introduction to Distribution Logistics*. Wiley, 2007.
- M.E. Edleson. *Real Options: Valuing Managerial Flexibility*. Harvard Business Publishing, 1999. `https://hbsp.harvard.edu/product/294109-PDF-ENG`.
- J.H. Hammond, A. Raman. *Sport Obermeyer Ltd*. Harvard Business Publishing, 1994. `https://hbsp.harvard.edu/product/695022-PDF-ENG`
- D.C. Snow, S.C. Wheelwright, A. Berkley Wagonfeld. *Genentech – Capacity Planning*. Harvard Business Publishing, 2005. `https://hbsp.harvard.edu/product/606052-PDF-ENG`