Dipartimento di
Scienze Matematiche
G. L. Lagrange

ECCELLENZA 2018 · 2022

Metodi quantitativi per la gestione del rischio
Parte 2: Misure di rischio

Paolo Brandimarte
paolo.brandimarte@polito.it
https://staff.polito.it/paolo.brandimarte

18 maggio 2022

Ordine dei Dottori Commercialisti e degli Esperti Contabili di Torino

Fondazione Piero Piccatti e Aldo Milanese
ORDINE DOTTORI COMMERCIALISTI ED ESPERTI CONTABILI TORINO

Dai modelli di rischio alle misure di rischio

Abbiamo visto che un modello di rischio è costituito da:

1. un insieme di fattori di rischio;
2. una caratterizzazione della loro incertezza;
3. un modo per trasformare una realizzazione (scenario) dei fattori di rischio in una misura di prestazione economica/operativa.

Si pone ora il problema di aggregare i risultati ottenuti nei possibili scenari in indicatori numerici che ne misurino il rischio, in modo da supportare le nostre decisioni.

Possiamo pensare di rappresentare il nostro prospetto incerto con una variabile casuale X, che rappresenta profitti o perdite (profit/loss, P/L). In concreto, associamo a un insieme di scenari (finito o infinito) una misura di probabilità.

Formalmente, una misura di rischio è una funzione $\xi(X)$ che trasforma la variabile casuale X in un numero, tanto più grande quanto maggiore è il rischio. In questo modo, per esempio, possiamo valutare i tradeoff tra il valore atteso del risultato (concetto simile alla media) e rischio.

Cosa ci insegna la teoria dei portafogli efficienti

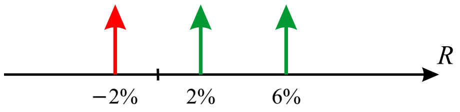
Supponiamo che la variabile casuale X rappresenti il rendimento di un portafoglio finanziario. Esso dipende dalla nostra scelta di allocazione, ovvero dai pesi assegnati ai diversi asset nel portafoglio.

Il principio di diversificazione del rischio suggerisce di non concentrare il portafoglio in un unico asset. Questo è quello che si farebbe se si scegliesse l'obiettivo di massimizzare il rendimento atteso di portafoglio, indicato con $\mathbb{E}(X)$ o μ_p.

Per esempio, consideriamo tre scenari di rendimento pari a -2%, 2% e 6%. Assumiamoli equiprobabili, per cui ogni scenario ha probabilità $1/3$. Il rendimento atteso è

$$\mu_p = \frac{1}{3} \times (-0.02) + \frac{1}{3} \times 0.02 + \frac{1}{3} \times 0.06 = 0.02,$$

come ovvio, dato il carattere simmetrico della distribuzione.

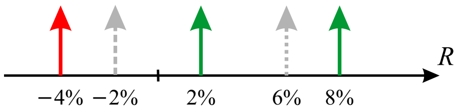


Considerare solo il valore atteso significa essere neutrali al rischio. Un atteggiamento opposto è considerare il caso peggiore, ovvero una perdita del 2%, ma questo significa essere forse troppo conservativi.

Nella teoria dei portafogli efficienti in media–varianza il rischio viene associato alla dispersione dei rendimenti, misurata dalla deviazione standard (radice quadrata della varianza):

$$\sigma_p = \sqrt{\tfrac{1}{3} \times (-0.02 - \mu_p)^2 + \tfrac{1}{3} \times \left(0.02 - \mu_p\right)^2 + \tfrac{1}{3} \times \left(0.06 - \mu_p\right)^2} = 0.0327.$$

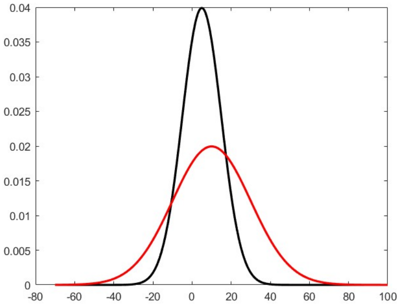
Se consideriamo una distribuzione con lo stesso centro di simmetria, ma valori più dispersi, la deviazione standard aumenta.
Nel caso in figura abbiamo $\sigma_p = 0.049$.

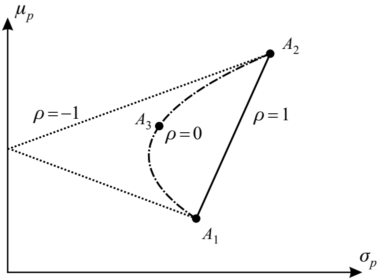


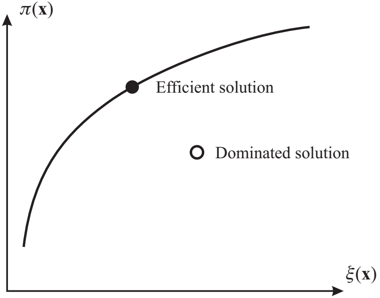
Il valore atteso μ e la deviazione standard σ caratterizzano le classiche curve a campana associate a una variabile casuale normale (detta anche Gaussiana).

Nella prima figura riportiamo le densità di probabilità per due distribuzioni normali. La curva in nero corrisponde a $\mu_1 = 5$ e $\sigma_1 = 10$, mentre quella in rosso corrisponde a $\mu_2 = 10$ e $\sigma_2 = 20$.

Nella teoria dei portafogli efficienti in media–varianza si traccia la frontiera dei portafogli non dominati, che dipende dalla correlazione ρ tra i rendimenti degli asset, come mostrato nel secondo grafico per due soli asset (nel terzo, $\pi(X)$ indica il rendimento o profitto atteso).



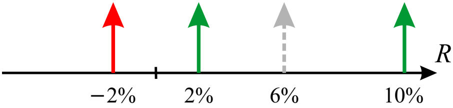




Il problema della simmetria

La deviazione standard tiene conto delle deviazioni rispetto al valore atteso in modo *simmetrico*. Questo pare sensato per distribuzioni simmetriche, come la normale, ma non lo è in generale, dato che le perdite stanno su una coda della distribuzione.

Consideriamo un caso favorevole, ottenuto dal primo spostando verso destra lo scenario di rendimento positivo alto, che ora corrisponde al 10%.
Il rendimento atteso sale al 3.33%, ma sale anche il rischio, se lo misuriamo con la deviazione standard, che ora è pari al 4.99%.



In termini di efficienza, non sapremmo a priori scegliere tra il primo e il terzo prospetto, anche se questo è ovviamente preferibile. Sembra sensato concentrare l'attenzione sulla parte di distribuzione che corrisponde alle perdite. Un modo per farlo è costruire misure di rischio basate sui quantili (concetto simile al percentile).

Quantili e value-at-risk (V@R)

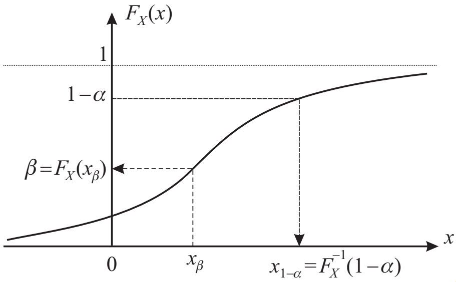
Consideriamo le seguenti questioni:

- In un problema di logistica, abbiamo la quantità q in magazzino; X rappresenta la domanda; qual è la probabilità di non avere una rottura di scorte (stockout)? Essa rappresenta un livello di servizio (di tipo 1, in-stock rate).
- Sia q il capitale di una banca; X rappresenta le perdite; qual è la probabilità di non andare in bancarotta?

Dal punto di vista matematico, la risposta è la stessa, ovvero la probabilità che X non ecceda q, indicata con $\mathbb{P}\{X \le q\}$.

Dato un numero x che rappresenta una possibile realizzazione della variabile casuale X, si definisce la funzione di distribuzione (cumulata), $F_X(x) = \mathbb{P}\{X \le x\}$, crescente da 0 a 1.

Dato un valore numerico x_β, la funzione valutata la corrispondente probabilità β.

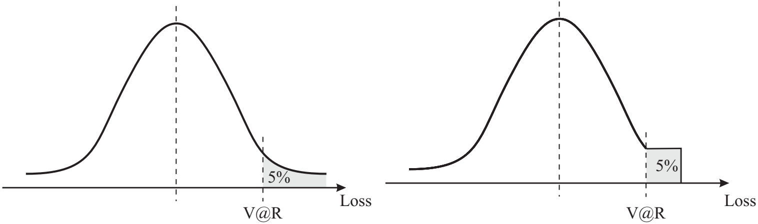


I quantili sono definiti invertendo la funzione di distribuzione. Dato il valore di probabilità $1 - \alpha$, il valore numerico corrispondente $x_{1-\alpha}$ è il quantile al livello $1 - \alpha$.

Per esempio, quale capitale deve detenere la banca per avere una probabilità di rovina pari ad $\alpha = 1\%$? In modo simile, che livello di magazzino ci permette di arrivare a un livello di servizio del 95%? [NB: la probabilità di stockout è $\alpha = 5\%$.]

Il value-at-risk (V@R), associato a un livello di probabilità $1 - \alpha$ e un orizzonte di tempo dato, ci dice quale livello di perdita non eccederemo, con probabilità $1 - \alpha$. Esso è quindi un quantile della distribuzione delle perdite.

La figura illustra il V@R al 95% per due distribuzioni di perdita.



(a) (b)

Il V@R è stato introdotto come misura di rischio asimmetrica da J.P. Morgan, ed è usato per stabilire i requisiti di capitalizzazione delle banche.

Un paradosso del $\mathrm{V@R}$

Un primo problema evidente del $\mathrm{V@R}$ è che esso non distingue le due distribuzioni (a) e (b) in figura. Sapere che non perdiamo più di un certo limite con una data probabilità non ci dice nulla su cosa può accadere oltre tale limite.

Inoltre il $\mathrm{V@R}$ ha comportamenti paradossali in certi casi. Consideriamo per esempio due bond a cedola zero, i cui emettitori possono andare in default con una probabilità del 4% (su un dato orizzonte di tempo).

Supponiamo che i due default siano indipendenti, e che l'eventuale perdita corrisponda a tutto il valore nominale del bond. Quindi la perdita è una variabile casuale, X per il primo bond e Y per il secondo, che assume i valori 0 o 100, con probabilità rispettivamente pari a 96% e 4%.

Calcoliamo il $\mathrm{V@R}$ per i due bond, con livello pari al 95%. Dato che siamo "sicuri" al 96% di non perdere nulla, abbiamo

$$\mathrm{V@R}_{0.95}(X) = \mathrm{V@R}_{0.95}(Y) = 0.$$

Consideriamo ora un portafoglio congiunto, in cui entrano entrambi i bond. Data l'assunzione di indipendenza dei default, la perdita $X + Y$ può assumere i valori seguenti:

- una perdita pari a 0, con probabilità $0.96^2 = 0.9216$;
- una perdita pari a 100, con probabilità $2 \times 0.96 \times 0.04 = 0.0768$;
- una perdita pari a 200, con probabilità $0.04^2 = 0.0016$.

Abbiamo

$$\mathbb{P}\{X + Y \leq 100\} = 0.9216 + 0.0768 > 0.95.$$

e quindi

$$\mathrm{V@R}_{0.95}(X + Y) = 100 > \mathrm{V@R}_{0.95}(X) + \mathrm{V@R}_{0.95}(Y) = 0.$$

Il risultato implica che la diversificazione può aumentare il rischio, se misurato dal $\mathrm{V@R}$. Tuttavia, il buon senso ci dice che una misura di rischio dovrebbe soddisfare la condizione

$$\xi(X + Y) \leq \xi(X) + \xi(Y).$$

Misure di rischio coerenti

Sono state introdotte le seguenti condizioni, che caratterizzano una misura di rischio *coerente*.

- **Normalizzazione.** Se non facciamo nulla, non corriamo rischi. Quindi se consideriamo la variabile casuale degenere $X \equiv 0$, possiamo porre $\xi(0) = 0$.
- **Monotonicità**. Se un investimento ha risultati sempre migliori di un altro, il suo rischio è più basso. Quindi se $X_1 \leq X_2$, allora $\xi(X_1) \geq \xi(X_2)$.
- **Invarianza per traslazioni**. Se aggiungiamo un ammontare fisso a all'investimento, $\xi(X + a) = \xi(X) - a$. Osserviamo che se $a > 0$, il rischio viene ridotto.
- **Omogeneità positiva**. Se raddoppiamo l'investimento, raddoppiamo il rischio: $\xi(bX) = b\xi(X)$, se $b \geq 0$. Questa condizione è criticata, in quanto non riflette il rischio di liquidità.
- **Subadditività**. La diversificazione non può aumentare il rischio, e di solito lo riduce: $\xi(X + Y) \leq \xi(X) + \xi(Y)$.

Nota. Una implicazione interessante della condizione di invarianza per traslazioni è:

$$\xi\big(X + \xi(X)\big) = \xi(X) - \xi(X) = 0.$$

Se assumiamo che le posizioni di portafoglio accettabili siano quelle con misura di rischio $\xi(X) \le 0$, la misura di rischio di un portafoglio di valore X indica il capitale necessario per renderlo accettabile.

Abbiamo visto un esempio in cui il $\mathrm{V@R}$ va a violare la condizione di subadditività. Ne segue che il $\mathrm{V@R}$ non è una misura di rischio coerente.

Un esempio di misura di rischio coerente è il *conditional value-at-risk* $(\mathrm{CV@R})$, che è il valore atteso della perdita, condizionata al superamento del $\mathrm{V@R}$. Si tratta di una tail expectation, che quindi distingue i casi (a) e (b) visti in precedenza.

Una misura di livello di servizio analoga in logistica è il fill rate (livello di servizio di tipo 2), che corrisponde alla frazione di domanda che ci aspettiamo di soddisfare, dato il livello delle scorte.

Simulazione Monte Carlo

Le misure di rischio asimmetriche, alternative alla deviazione standard, possono essere impiegate in vario modo, anche per definire una frontiera efficiente alternativa a quella classica in media–varianza.

Rimane tuttavia aperta la questione di come stimarle, a fronte di un modello di rischio. Lo strumento tipicamente adottato è la simulazione Monte Carlo, che permette di generare diversi scenari, in funzione dei fattori sottostanti, e di valutarne i rischi.

Per esempio, se dobbiamo valutare il VAN (valore attuale netto) di un investimento,

$$C_0 + \frac{C_1}{1+R} + \frac{C_2}{(1+R)^2} + \cdots + \frac{C_T}{(1+R)^T},$$

a fronte di flussi di cassa C_t incerti, possiamo effettuare una simulazione Monte Carlo dei fattori di rischio che hanno impatto sui flussi di cassa ed analizzare statisticamente il VAN corrispondente (oltre ad effettuare una analisi di sensitività sull'impatto del tasso di sconto R).

Un esempio di add-in per Excel, in grado di effettuare tali simulazioni, è Crystal Ball:
`https://www.oracle.com/it/middleware/technologies/crystalball.html`
`https://www.crystalballservices.com/Store/Oracle-Crystal-Ball`